Zur Berechnung von Quadratwurzeln mittels mechanischer Rechenmaschinen

Detlef Kraus

Es existiert eine Vielzahl von Rechenvorschriften, die genutzt werden können, um Quadratwurzeln positiver Zahlen ohne die Zuhilfenahme elektronischer Taschenrechner oder Computer zu ermitteln. Die meisten dieser Verfahren basieren auf einer iterativen Verwendung der binomischen Formeln und wurden mindestens bis Mitte der 60er Jahre (des letzten Jahrhunderts) im Schulunterricht gelehrt (siehe die Ausschnitte aus einem Schulbuch der 8. Klasse von 1969 im Anhang B). Diese Verfahren waren dazu geeignet, eine Berechnung mittels Stift und Papier relativ einfach durchzuführen. Eine mechanische Rechenmaschine ist hierbei allenfalls zur Unterstützung der durchzuführenden Multiplikationen einsetzbar.

In vielen Gebrauchsanleitungen zu mechanischen Vierspezies-Rechenmaschinen werden dagegen vielfach kochrezeptartige Rechenvorschriften anhand von Beispielen erläutert, ohne dass klar wird, auf welchen Grundlagen der angegebene Algorithmus basiert. So wird z. B. in der Bedienungsanleitung zu einer Walther WSR 160 das Wurzelziehen zwar anhand zweier Beispiele erläutert, jedoch ist hieraus kein Hinweis zu entnehmen, warum der Algorithmus das näherungsweise korrekte Ergebnis liefert.

Selbst in einer Abhandlung über den eigens zum Wurzelziehen konstruierten Automaten von Friden (vgl. [RLA]) wird der verwendete Algorithmus nicht ausreichend motiviert, so dass man sich beim Lesen der beschriebenen Beispiele oft fragt, warum eine bestimmte Aktion am Rechenautomat durchgeführt werden soll und was diese bewirkt?

Die folgende Darstellung soll zu einem besseren Verständnis eines oft im Zusammenhang mit mechanischen Rechenautomaten zitierten Algorithmus einen Beitrag leisten. Grundlage des Algorithmus ist der folgende einfache Zusammenhang.

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ eine natürliche Zahl ≥ 1. Dann gilt

$$n^2 = \sum_{j=1}^{n} (2j-1) \qquad [1]$$

für alle n. D.h. dass die Quadratzahlen sich aus der Summe der ungeraden natürlichen Zahlen ergeben, wobei die Zahl der Summanden gerade der Quadratwurzel entsprechen. Zum Beweis der Gleichheit in [1] wende man auf die rechte Seite der Gleichung die bereits vom jungen Gauß gefundene Summenformel für arithmetische Reihen an.

Der Toepler-Algorithmus

Die algorithmische Umsetzung dieser Eigenschaft mit Hilfe einer mechanischen Rechenmaschine könnte also derart erfolgen, dass die zu radizierende Zahl N in das Resultatwerk (RW) der Rechenmaschine eingestellt und sukzessive die Folge der ungeraden Zahlen subtrahiert wird.

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass der Zähler des Umdrehungswerks (UW) so eingestellt werden muss, dass er die Anzahl der Subtraktionen zählt.

Der Nachteil dieser naiven Vorgehensweise ist jedoch der, dass man bei größeren Zahlen zu viele Kurbelbewegungen benötigt. So würde etwa die Berechnung von $\sqrt{58081}$ insgesamt 241 Kurbeldrehungen erfordern und die Einstellung ebenso vieler ungerader Zahlen in das Einstellwerk. Darüber hinaus lässt sich für den Fall, dass N keine Quadratzahl ist, auf diese Weise kein ‚exaktes' Ergebnis ermitteln, sondern nur der größte ganzzahlige Wert unterhalb von $\sqrt{N}$.

Für die weitere Analyse sei N eine beliebige positive natürliche Zahl. Für jedes $N \in \mathbb{N}^+$ gilt: es existiert eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

gilt, wobei $a_i \in \{0,1,...,9\}$ und $i = 0,...,k$.

O. B. d. A sei im Folgenden k ungerade. N lässt sich in sog. ‚Zweiergruppen' einteilen:

$$\begin{aligned} N &= (a_k 10 + a_{k-1})10^{k-1} + ... + (a_3 10 + a_2)10^2 + (a_1 10 + a_0)10^0 \\ N &= \quad A_{k-1}10^{k-1} \quad + ... + \quad A_2 10^2 \quad + \quad A_0 10^0 \end{aligned} \qquad [2]$$

wobei die Koeffizienten A_i der Zweiergruppen stets < 100 (d.h. zweistellig) sind und somit $\sqrt{A_i} < 10$.

Ferner gilt als Folgerung aus [1]

$$10^{2k} n^2 = \sum_{j=1}^{10^k n} (2j-1), \qquad [3]$$

was äquivalent mit der bekannten Tatsache

$$\sqrt{(10^{2k} n)} = 10^k \sqrt{n} \qquad [4]$$

ist.

Diese Eigenschaften lassen sich nun in Form eines Algorithmus nutzen, um beginnend mit den höherwertigsten beiden Stellen (A_{k-1}) der zu radizierenden Zahl von diesen die ersten ungeraden Zahlen zu subtrahieren, so lange bis die Subtraktion der folgenden ungeraden Zahl zu einem Überlauf führen würde.

Es sei die letzte subtrahierte Zahl die j-te ungerade Zahl gewesen ($j \in \mathbb{N}^+$), also 2j-1, welche von der höherwertigen ‚Zweiergruppe' subtrahiert wurde. Dies entspricht dem größten ganzzahlige Wert unterhalb $\sqrt{A_{k-1}}$. Nun geht man zur nächsten Zweiergruppe über, wobei dabei gedanklich die erste Zweiergruppe A_{k-1} mit 100 multipliziert wird. Daher muss man nun wegen [3] nicht die nächste (die (j+1)-te) ungerade Zahl, sondern die (10j+1)-te ungerade Zahl von den beiden Zweierblöcken A_{k-1} A_{k-3} (aufgefasst als vierstellige Zahl $A_{k-1}10^2+A_{k-3}10^0$) subtrahieren und so fort. Analog verfährt man mit den nächsten Zweiergruppen und dem jeweiligen Rest, der bei jeder Subtraktion verblieben ist.

Die einzige ‚Merkregel' für die Ausführung mit der mechanischen Rechenmaschine (oder auch bei einer händischen Kalkulation) besteht darin: Hat man eine Zweiergruppe abgearbeitet, d.h. lässt sich die nächste ungerade Zahl nicht mehr subtrahieren, ohne einen Überlauf zu verursachen, muss man die nächste Zweiergruppe ‚hinzunehmen' und die auf das Zehnfache der letzten ungeraden Zahl folgende ungerade Zahl subtrahieren. Hiermit verfährt man so lange, bis man alle Zweiergruppen in die Berechnung einbezogen hat. Es ist zu beachten, dass wegen [1] im Umdrehungswerk immer die zuletzt verwendete ungerade Zahl abzulesen ist; man muss sie sich nicht separat notieren oder merken. Die einzige aber einfache vom Bediener durch Kopfrechnung zu bewältigende Aufgabe besteht darin, nach Verschieben des Wagens die nächste ungerade Zahl zu bestimmen.

Als Beispiel berechnen wir die Wurzel aus 1234 in Zweiergruppen aufgeteilt √12’34:

j	- (2j-1)	A_2	A_0
		12	34
1	-1	11	34
2	-3	08	34
3	-5	03	34
31	-61	02	73
32	-63	02	10
33	-65	01	45
34	-67	00	78
35	-69	00	09

In der gelb markierten Zeile muss man in den nächsten Zweierblock wechseln und beim „Weiterzählen“ der ungeraden Zahlen zunächst die Letzte mit 10 multiplizieren.
In erster Näherung erhält man also nach nur 8 Kurbeldrehungen den Wert 35. Der Algorithmus lässt sich aber leicht auf die Nachkommastellen erweitern, indem man 1234 z.B. auf einer Maschine mit 10-stelligem Resultatwerk als 1234,000000 interpretiert und die Berechnungen weiter fortführt.

j	- (2j-1)	A_2	A_0	A_{-2}	A_{-4}	A_{-6}
		12	34	00	00	00
1	-1	11	34	00	00	00
2	-3	08	34	00	00	00
3	-5	03	34	00	00	00
31	-61	02	73	00	00	00
32	-63	02	10	00	00	00
33	-65	01	45	00	00	00
34	-67	00	78	00	00	00
35	-69	00	09	00	00	00
351	-701	00	01	99	00	00
3511	-7021	00	01	28	79	00
3512	-7023	00	00	58	56	00
35121	-70241	00	00	51	53	59
..	..	..	..	..	..	..
35128	-70255	00	00	02	36	16

Man erhält auf drei Stellen genau √1234 ≈ 35.128.

Es wird unmittelbar klar, dass die Zahl der vorzunehmenden Einstellungen und der Kurbelbewegungen deutlich reduziert wird gegenüber der eingangs erwähnten Vorgehensweise. Bei k Zweiergruppen werden maximal 9*k Subtraktionen erforderlich; in o.g. Beispiel √58081 also maximal 27 (de facto nur 7) anstelle von 241.

Der Leser möge zur Übung mit diesem Schema √2 auf 6 Nachkommastellen zu bestimmen.

Anhang A enthält ein Beispiel, welches den Algorithmus auf einer Walther WSR 160 illustriert.

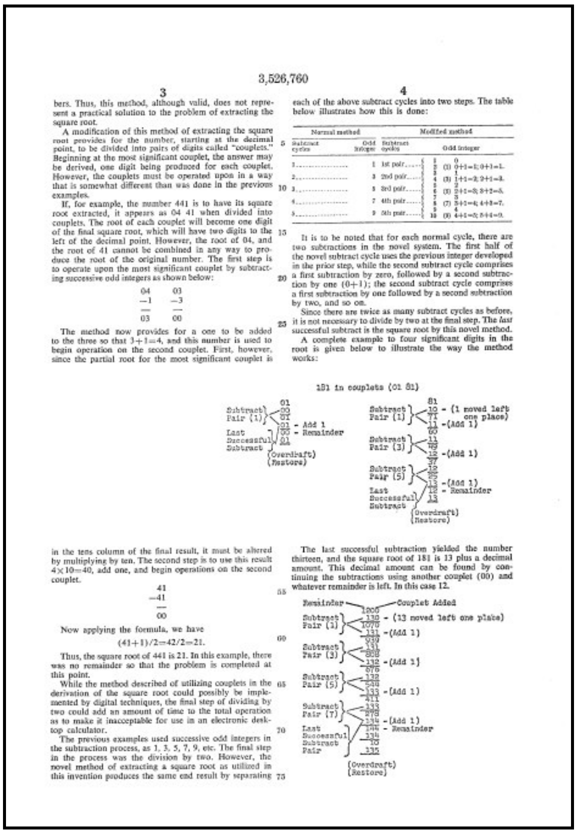
In zahlreichen Handbüchern von alten Rechenmaschinen, wird das beschriebene Verfahren als Toepler-Algorithmus bzw. Toepler-Verfahren bezeichnet. Damit wird das Verfahren wohl August Joseph Ignaz Toepler (7. September 1836 – 6. März 1912) zugeschrieben, der ab 1876 als Professor für Physik und Leiter des Physikalischen Instituts in Dresden wirkte.

Eine weitere Automatisierung des Verfahrens erreicht man aufgrund der einfachen Tatsache, dass

$$5*n^2 = \sum_{j=1}^{n} (10j-5) \qquad [5]$$

gilt. Multipliziert man also vorab die zu radizierende Zahl mit 5, kann der Algorithmus angewendet werden, in dem sukzessive das Fünffache der ungeraden Zahlen subtrahiert wird, also die Folge 5, 15, 25, ... Der Rest des Verfahrens bleibt unverändert.

Dies macht die vom Bediener vorzunehmenden Einstellungen deutlich einfacher und erlaubte letztendlich eine automatische Verarbeitung auf elektromechanischen Geräten. So muss man z. B. nicht mehr den Übertrag (Änderung der Zehnerstelle) von 9 auf 11 oder 19 auf 21 etc. durchführen, sondern braucht nur den Hebel mit der Zehnerstelle der Folge 5, 15, 25, 35, ... jeweils um eine Stelle weiterschieben. Diese Eigenschaft nutzte Carl Friden zur Konstruktion seiner elektromechanisch arbeitenden Wurzelautomaten, die 1952 auf den Markt kamen und automatisch Wurzeln aus bis zu zehnstelligen Zahlen ziehen konnten.



3,526,760

3

bers. Thus, this method, although valid, does not represent a practical solution to the problem of extracting the square root.

A modification of this method of extracting the square root provides for the number, starting at the decimal point, to be divided into pairs of digits called "couplets." Beginning at the most significant couplet, the answer may be derived, one digit being produced for each couplet. However, the couplets must be operated upon in a way that is somewhat different than was done in the previous examples.

If, for example, the number 441 is to have its square root extracted, it appears as 04 41 when divided into couplets. The root of each couplet will become one digit of the final square root, which will have two digits to the left of the decimal point. However, the root of 04, and the root of 41 cannot be combined in any way to produce the root of the original number. The first step is to operate upon the most significant couplet by subtracting successive odd integers as shown below:

```
04    03
-1    -3
--    --
03    00
```

The method now provides for a one to be added to the three so that 3+1=4, and this number is used to begin operation on the second couplet. First, however, since the partial root for the most significant couplet is in the tens column of the final result, it must be altered by multiplying by ten. The second step is to use this result 4×10=40, add one, and begin operations on the second couplet.

```
 41
-41
 --
 00
```

Now applying the formula, we have

(41+1)/2=42/2=21.

Thus, the square root of 441 is 21. In this example, there was no remainder so that the problem is completed at this point.

While the method described of utilizing couplets in the derivation of the square root could possibly be implemented by digital techniques, the final step of dividing by two could add an amount of time to the total operation as to make it inacceptable for use in an electronic desk-top calculator.

The previous examples used successive odd integers in the subtraction process, as 1, 3, 5, 7, 9, etc. The final step in the process was the division by two. However, the novel method of extracting a square root as utilized in this invention produces the same end result by separating

4

each of the above subtract cycles into two steps. The table below illustrates how this is done:

Normal method		Modified method		
Subtract cycles	Odd integer	Subtract cycles		Odd integer
1	1	1st pair	1, 2	(1) 0+1=1; 0+1=1.
2	3	2nd pair	3, 4	(3) 1+1=2; 2+1=3.
3	5	3rd pair	5, 6	(5) 2+1=3; 3+2=5.
4	7	4th pair	7, 8	(7) 3+1=4; 4+3=7.
5	9	5th pair	9, 10	(9) 4+1=5; 5+4=9.

It is to be noted that for each normal cycle, there are two subtractions in the novel system. The first half of the novel subtract cycle uses the previous integer developed in the prior step, while the second subtract cycle comprises a first subtraction by zero, followed by a second subtraction by one (0+1); the second subtract cycle comprises a first subtraction by one followed by a second subtraction by two, and so on.

Since there are twice as many subtract cycles as before, it is not necessary to divide by two at the final step. The *last* successful subtract is the square root by this novel method.

A complete example to four significant digits in the root is given below to illustrate the way the method works:

181 in couplets (01 81)

```
                    01
Subtract  }  /      00
Pair (1)  } <       01
             \      01 - Add 1
Last        ]  /    00 - Remainder
Successful  ] /     01
Subtract    ]
            (Overdraft)
            (Restore)

                    81
Subtract  }  /      10 - (1 moved left one place)
Pair (1)  } <       71
             \      11 -(Add 1)
                    60
Subtract  }  /      11
Pair (3)  } <       49
             \      12 -(Add 1)
                    37
Subtract  }  /      12
Pair (5)  } <       25
             \      13 -(Add 1)
Last        ]  /    12 - Remainder
Successful  ] /     13
Subtract    ]
            (Overdraft)
            (Restore)
```

The last successful subtraction yielded the number thirteen, and the square root of 181 is 13 plus a decimal amount. This decimal amount can be found by continuing the subtractions using another couplet (00) and whatever remainder is left. In this case 12.

```
Remainder ——       —— Couplet Added
              1200
Subtract  }  /     130 - (13 moved left one place)
Pair (1)  } <     1070
             \     131 -(Add 1)
                   939
Subtract  }  /     131
Pair (3)  } <      808
             \     132 -(Add 1)
                   676
Subtract  }  /     132
Pair (5)  } <      544
             \     133 -(Add 1)
                   411
Subtract  }  /     133
Pair (7)  } <      278
             \     134 -(Add 1)
Last        ]  /   144 - Remainder
Successful  ] /    134
Subtract    ]      10
Pair        ]      135
            (Overdraft)
            (Restore)
```

Ausschnitt aus der Patentschrift von Friden

Das Newton'sche Näherungsverfahren (Iterationsverfahren)

Bei einem iterativen Verfahren wird, ausgehend von einem Näherungswert x_k ein neuer Näherungswert x_{k+1} bestimmt, der den zu berechnenden Wert besser approximiert. Das bekannteste Verfahren ist das sog. Newton'sche Näherungsverfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel aus n:

$$x_{k+1} = x_k - ([x_k]^2 - n)/2x_k \qquad [6]$$

oder algebraisch umformuliert:

$$x_{k+1} = n/2x_k + x_k/2 \qquad [7]$$

Zur Bestimmung von $\sqrt{n}$ zu einer positiven Zahl n wird zunächst ein Näherungswert x_k zu $\sqrt{n}$ bestimmt (z. B. aus einer Tabelle), so dass der Abstand $h = \sqrt{n} - x_k$ möglichst klein ist, auf jeden Fall $h < 2x_k$ gilt. Dann ist x_{k+1} ein besserer Näherungswert für $\sqrt{n}$ mit einem kleineren Fehler $h^2/2x_k$.

Dies zeigt man wie folgt. Es gilt:

$$n = (h + x_k)^2 = h^2 + 2hx_k + [x_k]^2$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch $2x_k$ so ergibt sich

$$n/2x_k = h^2/2x_k + h + x_k/2$$

Man addiert man auf beiden Seiten der Gleichung $x_k/2$ und erhält wegen $h + x_k = \sqrt{n}$

$$n/2x_k + x_k/2 = \sqrt{n} + h^2/2x_k$$

oder

$$\sqrt{n} = x_{k+1} - h^2/2x_k$$

und wegen $h < 2x_k$ ist $h^2/2x_k < h$ und somit x_{k+1} eine bessere Approximation als x_k.

Anmerkung: Das Newton Verfahren ist in seiner Allgemeinheit auch zur Berechnung von Wurzeln höherer Ordnung (>2) anwendbar. Bei der obigen Betrachtung handelt es sich lediglich um einen Spezialfall.

Wie kann nun die Iterationsvorschrift [6] am besten mittels einer Vierspezies Rechenmaschine umsetzen? Zunächst wird der Dividend $2x_k$ bestimmt, schriftlich notiert aber im Resultatwerk gelassen. Im Umdrehungswerk befindet sich der Faktor 2 im Einstellwerk x_k. Es wird der Wert im Umdrehungswerk von 2 weiter auf den Wert x_k entwickelt, wodurch im Resultatwerk der Wert $[x_k]^2$ entsteht. Nun wird der vorhin notierte Wert $2x_k$ in das Einstellwerk eingegeben und mittels einer sogenannten Aufbaudivision im Resultatwerk der Wert n (genauer ein ‚nahe' bei n liegender Wert) entwickelt, wodurch im Umdrehungswerk x_{k+1} entsteht, da x_k bereits im Umdrehungswerk eingestellt war.

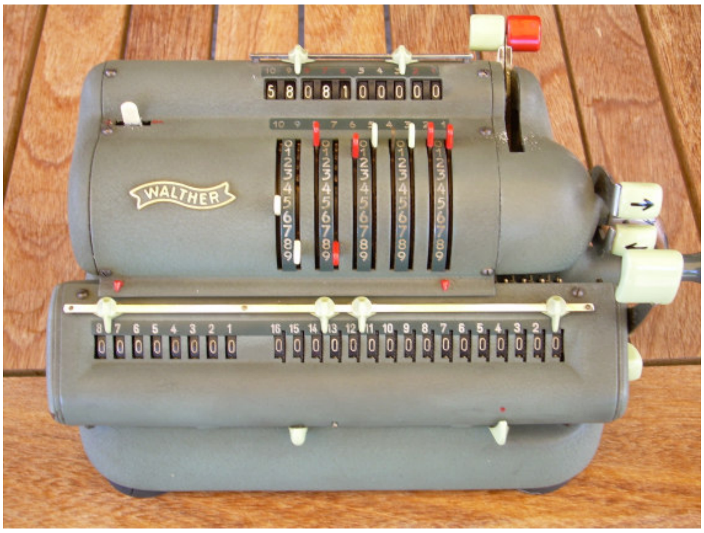
Als Beispiel berechnen wir $\sqrt{677.25}$. Ein Näherungswert ist x_1=26.

Einstellwerk	Umdrehungswerk	Resultatwerk
26	2	52 (notieren)
26	26	676
52		
52	260240	67725 (genau: 677248)

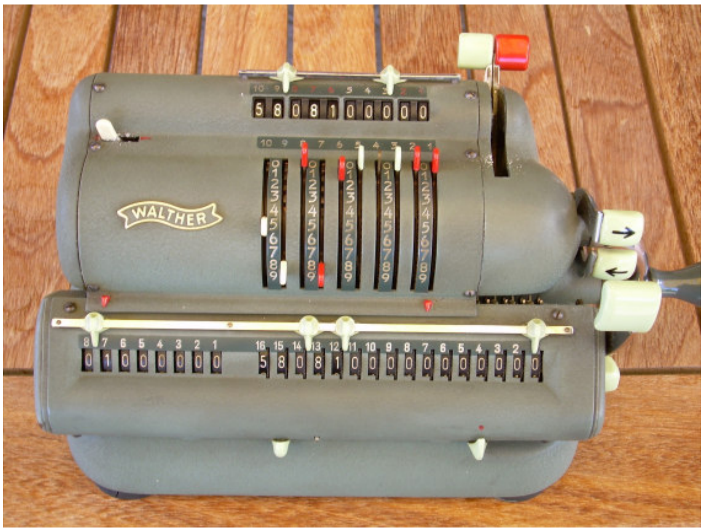
wodurch sich also $\sqrt{677.25} \approx 26.0240$ ergibt.

Anhang A: Beispiel der Berechnung einer Quadratwurzel auf einer Walther WSR 160 Rechenmaschine mit dem Töpler-Algorithmus

Nachfolgend wird die Berechnung der Wurzel aus der Zahl 58051 illustriert. Zunächst wird die Zahl in die höherwertigen Positionen (hier Position 10 bis Position 6) der Maschine eingestellt



und in das Resultatwerk gekurbelt:

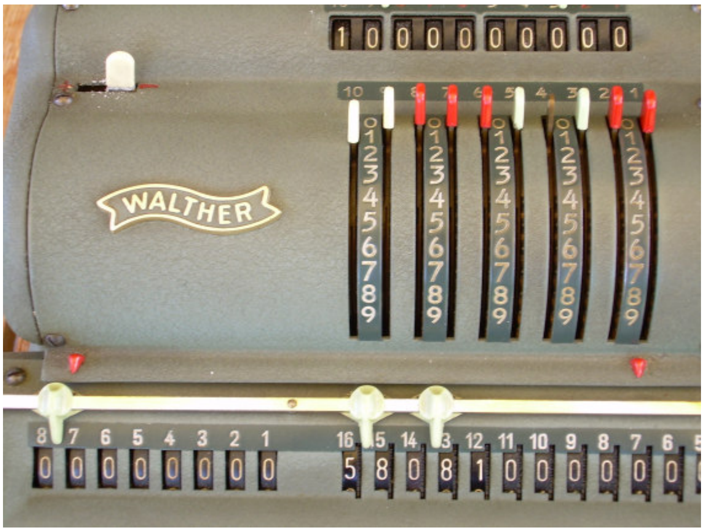


Im Umdrehungszählwerk ist dadurch eine 1 an der Position ‚7' entstanden. Diese muss gelöscht werden. Bei der Walther WSR 160 muss hierzu vor Betätigung des Löschhebels am Schlitten der kleine Schieber auf der rechten Seite des Schlittens nach links gestellt werden.

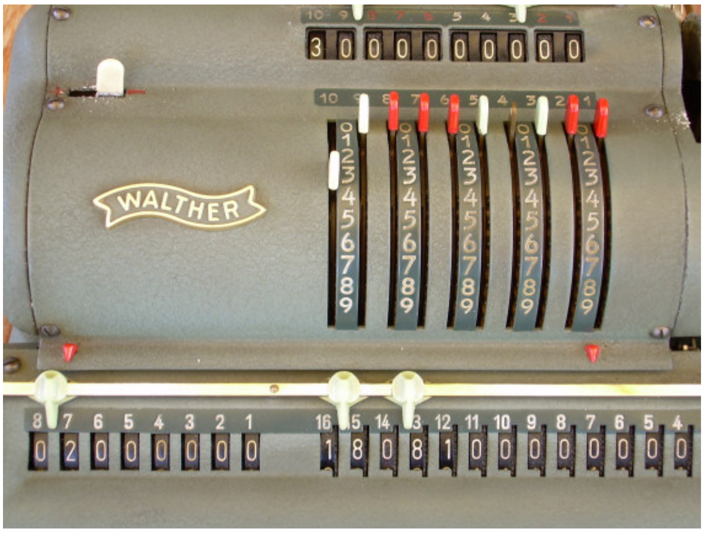
Bei Betätigen des Löschhebels wird hierdurch verhindert, dass das Resultatwerk ebenfalls gelöscht wird.

Anschließend wird der kleine Hebel oben links an der Maschine auf ‚-' gestellt, so dass Kurbelbewegungen zur Subtraktion (gegen den Uhrzeigersinn) positiv gezählt werden.

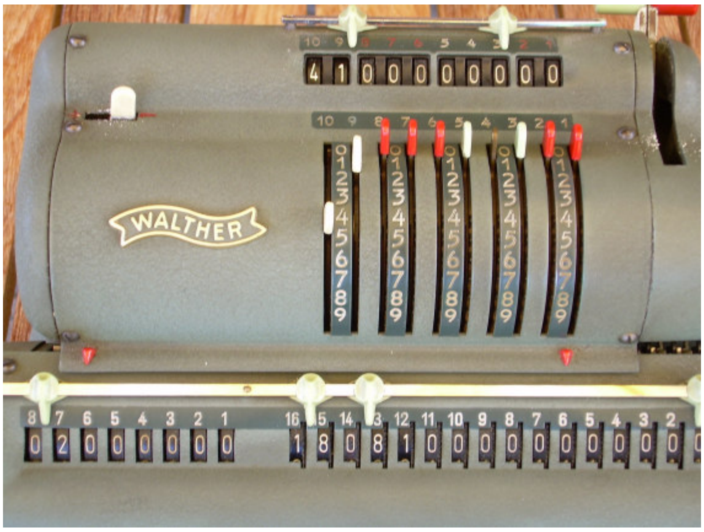
Nun wird die erste ungerade Zahl eingestellt, hier die **1**. Man beachte, dass die Einteilung in Zweierblocks dazu geführt hat, dass der höchstwertige lediglich aus einer Ziffer (hier der **5**) besteht.



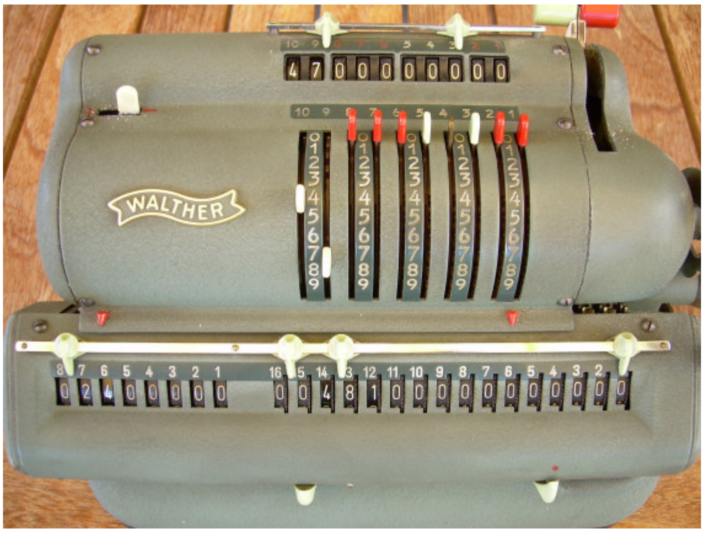
Es erfolgt die Subtraktion von 1 und 3.



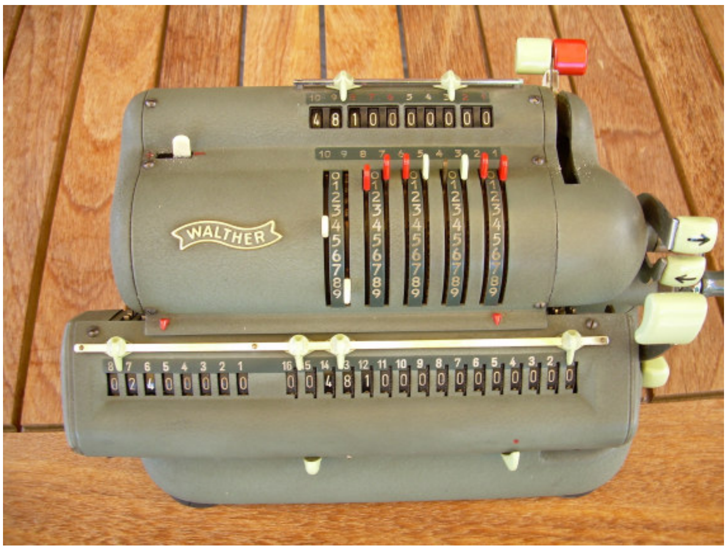
Im Umdrehungswerk wird nun eine **2** angezeigt, da zwei ungerade Zahlen subtrahiert wurden. Die Subtraktion der nächsten ungeraden Zahl (der **5**) würde zum Überlauf führen. Aus diesem Grund wird der Schlitten um eine Stelle nach links versetzt und die weiteren ungeraden Zahlen werden vom nächsten Zweierblock mit dem verbliebenen Rest (hier: 180, in den Positionen 16 bis 14 des RW) subtrahiert. Wegen (3) ist die nächste zu subtrahierende Zahl die 21te ungerade Zahl, also die **41**. Die Umdrehungen werden jetzt wegen der Verschiebung des Schlittens in der Position **6** gezählt. Wegen (2) tritt hier im UW nie ein Übertrag auf, da maximal 9 aufeinanderfolgende ungerade Zahlen subtrahiert werden



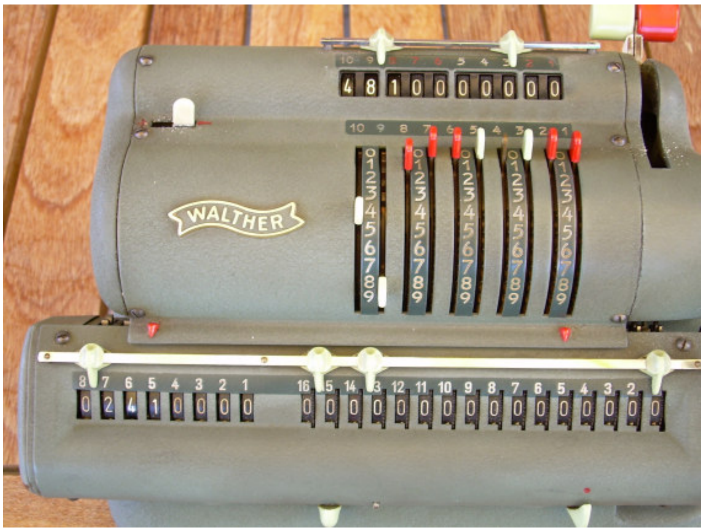
Nacheinander werden 41, 43, 45, und 47 subtrahiert.

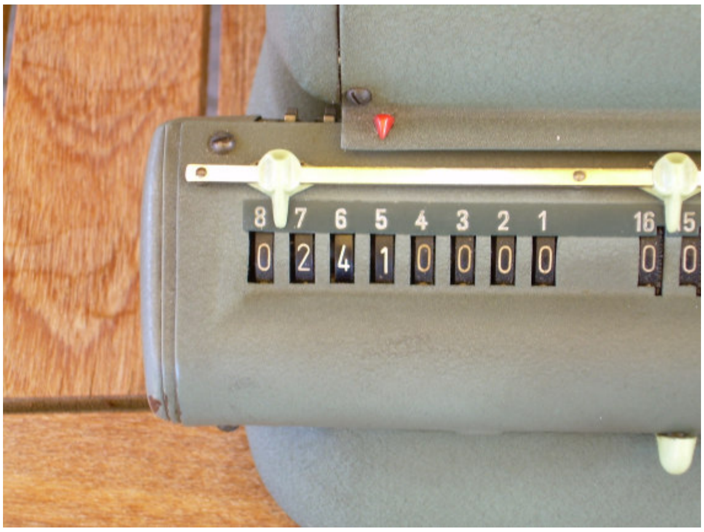


Die Subtraktion der 51 wäre nicht mehr möglich. Daher wird der Wagen wiederum um eine Stelle nach links verschoben. Im nächsten Schritt erfolgt dann die Subtraktion der 241-ten ungeraden Zahl (man beachte, dass man dies im Umdrehungszählwerk links ablesen kann; um 1 inkrementierte angezeigte Zahl).



Das Ergebnis kann im Umdrehungszählwerk abgelesen werden.



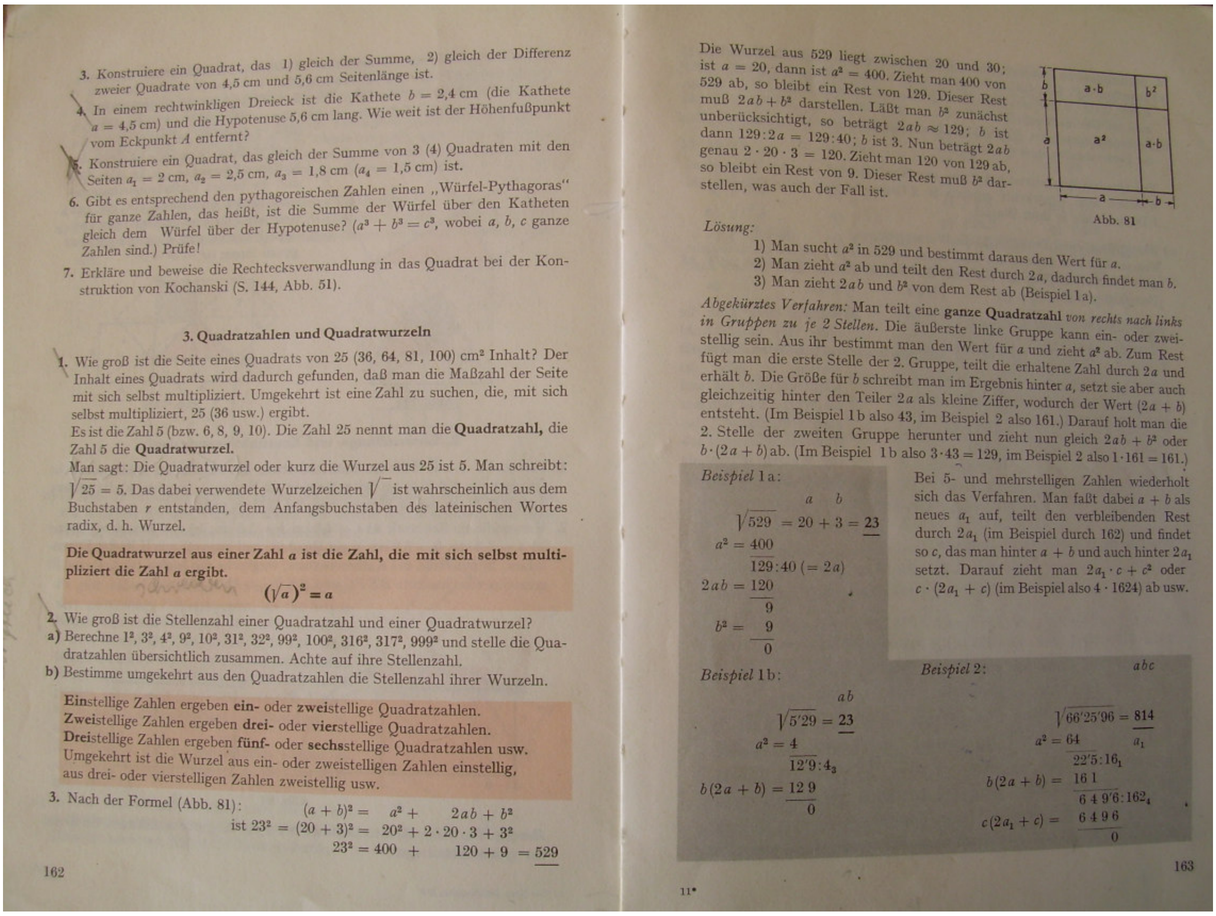


Im vorliegenden Fall erhält man ein exaktes Ergebnis. Es wird aber auch hier intuitiv klar, dass man im Falle der Quadratwurzelberechnung aus einer nicht-quadratischen Zahl, die Nachkommastellen berechnet, indem man mit den Zweierblöcken ‚00' den Algorithmus fortführt.

Anhang B: Beispiel zur Berechnung von Quadratwurzeln von Hand als Folgerung aus dem Satz des Pythagoras

Nachfolgende Abbildungen sind dem Schulbuch [DNK] entnommen.

Anhand der Beschreibung erkennt man, dass das Verfahren auf den Satz des Pythagoras zurückgeführt wird, indem man die zu ermittelnde Wurzel ‚geschickt' in einzelne Summanden aufteilt.
Dem Schüler wird dies zunächst an drei- und vierstelligen Zahlen erläutert und dann in Form eines Beispiels die iterative Anwendung eines sog. ‚abgekürzten' Verfahrens auch für größere Zahlen erläutert.



3. Konstruiere ein Quadrat, das 1) gleich der Summe, 2) gleich der Differenz zweier Quadrate von 4,5 cm und 5,6 cm Seitenlänge ist.
4. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Kathete $b = 2{,}4$ cm (die Kathete $a = 4{,}5$ cm) und die Hypotenuse 5,6 cm lang. Wie weit ist der Höhenfußpunkt vom Eckpunkt A entfernt?
5. Konstruiere ein Quadrat, das gleich der Summe von 3 (4) Quadraten mit den Seiten $a_1 = 2$ cm, $a_2 = 2{,}5$ cm, $a_3 = 1{,}8$ cm ($a_4 = 1{,}5$ cm) ist.
6. Gibt es entsprechend den pythagoreischen Zahlen einen „Würfel-Pythagoras" für ganze Zahlen, das heißt, ist die Summe der Würfel über den Katheten gleich dem Würfel über der Hypotenuse? ($a^3 + b^3 = c^3$, wobei a, b, c ganze Zahlen sind.) Prüfe!
7. Erkläre und beweise die Rechtecksverwandlung in das Quadrat bei der Konstruktion von Kochanski (S. 144, Abb. 51).

3. Quadratzahlen und Quadratwurzeln

1. Wie groß ist die Seite eines Quadrats von 25 (36, 64, 81, 100) cm² Inhalt? Der Inhalt eines Quadrats wird dadurch gefunden, daß man die Maßzahl der Seite mit sich selbst multipliziert. Umgekehrt ist eine Zahl zu suchen, die, mit sich selbst multipliziert, 25 (36 usw.) ergibt.
Es ist die Zahl 5 (bzw. 6, 8, 9, 10). Die Zahl 25 nennt man die **Quadratzahl,** die Zahl 5 die **Quadratwurzel.**
Man sagt: Die Quadratwurzel oder kurz die Wurzel aus 25 ist 5. Man schreibt: $\sqrt{25} = 5$. Das dabei verwendete Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ ist wahrscheinlich aus dem Buchstaben r entstanden, dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes radix, d. h. Wurzel.

Die Quadratwurzel aus einer Zahl a ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert die Zahl a ergibt.

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

2. Wie groß ist die Stellenzahl einer Quadratzahl und einer Quadratwurzel?
a) Berechne $1^2, 3^2, 4^2, 9^2, 10^2, 31^2, 32^2, 99^2, 100^2, 316^2, 317^2, 999^2$ und stelle die Quadratzahlen übersichtlich zusammen. Achte auf ihre Stellenzahl.
b) Bestimme umgekehrt aus den Quadratzahlen die Stellenzahl ihrer Wurzeln.

Einstellige Zahlen ergeben **ein-** oder **zwei**stellige Quadratzahlen.
Zweistellige Zahlen ergeben **drei-** oder **vier**stellige Quadratzahlen.
Dreistellige Zahlen ergeben **fünf-** oder **sechs**stellige Quadratzahlen usw.
Umgekehrt ist die Wurzel aus ein- oder zweistelligen Zahlen einstellig, aus drei- oder vierstelligen Zahlen zweistellig usw.

3. Nach der Formel (Abb. 81):

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{ist } 23^2 = (20+3)^2 &= 20^2 + 2\cdot 20\cdot 3 + 3^2 \\ 23^2 &= 400 + 120 + 9 = \underline{529} \end{aligned}$$

162

Die Wurzel aus 529 liegt zwischen 20 und 30; ist $a = 20$, dann ist $a^2 = 400$. Zieht man 400 von 529 ab, so bleibt ein Rest von 129. Dieser Rest muß $2ab + b^2$ darstellen. Läßt man b^2 zunächst unberücksichtigt, so beträgt $2ab \approx 129$; b ist dann $129 : 2a = 129 : 40$; b ist 3. Nun beträgt $2ab$ genau $2 \cdot 20 \cdot 3 = 120$. Zieht man 120 von 129 ab, so bleibt ein Rest von 9. Dieser Rest muß b^2 darstellen, was auch der Fall ist.

Abb. 81

Lösung:

1) Man sucht a^2 in 529 und bestimmt daraus den Wert für a.
2) Man zieht a^2 ab und teilt den Rest durch $2a$, dadurch findet man b.
3) Man zieht $2ab$ und b^2 von dem Rest ab (Beispiel 1a).

Abgekürztes Verfahren: Man teilt eine **ganze Quadratzahl** *von rechts nach links in Gruppen zu je 2 Stellen.* Die äußerste linke Gruppe kann ein- oder zweistellig sein. Aus ihr bestimmt man den Wert für a und zieht a^2 ab. Zum Rest fügt man die erste Stelle der 2. Gruppe, teilt die erhaltene Zahl durch $2a$ und erhält b. Die Größe für b schreibt man im Ergebnis hinter a, setzt sie aber auch gleichzeitig hinter den Teiler $2a$ als kleine Ziffer, wodurch der Wert $(2a + b)$ entsteht. (Im Beispiel 1b also 43, im Beispiel 2 also 161.) Darauf holt man die 2. Stelle der zweiten Gruppe herunter und zieht nun gleich $2ab + b^2$ oder $b \cdot (2a + b)$ ab. (Im Beispiel 1b also $3 \cdot 43 = 129$, im Beispiel 2 also $1 \cdot 161 = 161$.)

Beispiel 1a:

$$\begin{aligned} & \qquad\quad a \quad\; b \\ \sqrt{529} &= 20 + 3 = \underline{23} \\ a^2 &= 400 \\ & \overline{129} : 40\ (= 2a) \\ 2ab &= 120 \\ & \overline{9} \\ b^2 &= 9 \\ & \overline{0} \end{aligned}$$

Bei 5- und mehrstelligen Zahlen wiederholt sich das Verfahren. Man faßt dabei $a + b$ als neues a_1 auf, teilt den verbleibenden Rest durch $2a_1$ (im Beispiel durch 162) und findet so c, das man hinter $a + b$ und auch hinter $2a_1$ setzt. Darauf zieht man $2a_1 \cdot c + c^2$ oder $c \cdot (2a_1 + c)$ (im Beispiel also $4 \cdot 1624$) ab usw.

Beispiel 1b:

$$\begin{aligned} & \qquad ab \\ \sqrt{5'29} &= \underline{23} \\ a^2 &= 4 \\ & \overline{12'9} : 4_3 \\ b(2a+b) &= 12\,9 \\ & \overline{0} \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} & \qquad\qquad\quad abc \\ \sqrt{66'25'96} &= \underline{814} \\ a^2 &= 64 \qquad\quad a_1 \\ & \overline{22'5} : 16_1 \\ b(2a+b) &= 16\,1 \\ & \overline{6\,4\,9'6} : 162_4 \\ c(2a_1+c) &= 6\,4\,9\,6 \\ & \overline{0} \end{aligned}$$

11*

163

Das abgekürzte Verfahren nimmt die Aufteilung in Zweiergruppen vor und es wird beginnend mit der höherwertigsten Gruppe die ‚größtmögliche' Quadratwurzel (a) bestimmt. Nach Subtraktion des Quadrats (a^2) von der ursprünglichen Zweiergruppe wird dem verbleibenden Rest die nächste Zweiergruppe ‚hinzugefügt' und ein Wert b bestimmt, so dass sich b*(2a+b) diesem am ‚besten' annähert. Hierfür wird dann eine geeignete Technik beschriebe. Der Rest ist iterative Anwendung des Verfahrens.

... Ergebnis hinter a, setzt sie aber auch gleichzeitig hinter den Teiler $2a$ als kleine Ziffer, wodurch der Wert $(2a+b)$ entsteht. (Im Beispiel 1b also 43, im Beispiel 2 also 161.) Darauf holt man die 2. Stelle der zweiten Gruppe herunter und zieht nun gleich $2ab + b^2$ oder $b \cdot (2a+b)$ ab. (Im Beispiel 1b also $3 \cdot 43 = 129$, im Beispiel 2 also $1 \cdot 161 = 161$.)

Beispiel 1a:

$$\sqrt{529} = \overset{a}{20} + \overset{b}{3} = \underline{23}$$
$$\begin{array}{rl} a^2 = & 400 \\ \hline & 129 : 40\ (= 2a) \\ 2ab = & 120 \\ \hline & 9 \\ b^2 = & 9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Bei 5- und mehrstelligen Zahlen wiederholt sich das Verfahren. Man faßt dabei $a + b$ als neues a_1 auf, teilt den verbleibenden Rest durch $2a_1$ (im Beispiel durch 162) und findet so c, das man hinter $a + b$ und auch hinter $2a_1$ setzt. Darauf zieht man $2a_1 \cdot c + c^2$ oder $c \cdot (2a_1 + c)$ (im Beispiel also $4 \cdot 1624$) ab usw.

Beispiel 1b:

$$\sqrt{5'29} = \underline{\overset{ab}{23}}$$
$$\begin{array}{rl} a^2 = & 4 \\ \hline & 12'9 : 4_3 \\ b(2a+b) = & 12\,9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Beispiel 2:

$$\sqrt{66'25'96} = \underline{\overset{abc}{814}}$$
$$\begin{array}{rl} a^2 = & 64 \qquad a_1 \\ \hline & 22'5 : 16_1 \\ b(2a+b) = & 16\,1 \\ \hline & 6\,4\,9'6 : 162_4 \\ c(2a_1+c) = & 6\,4\,9\,6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

163

Schließlich wird dann das Verfahren erweitert auf rationale Zahlen.

(Beispiel 3 und 4).

Beispiel 3:

$$\sqrt{5{,}52'25} = \underline{2{,}35}$$
$$\begin{array}{l} 4 \\ \hline 15'2 : 4_3 \\ 12\,9 \\ \hline \quad 2\,32'5 : 46_5 \\ \quad 2\,32\,5 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Beispiel 4:

$$\sqrt{8'36{,}94'8} = \underline{28{,}93}$$
$$\begin{array}{l} 4 \\ \hline 43'6 : 4_8 \\ 38\,4 \\ \hline \quad 5\,29'4 : 56_9 \\ \quad 5\,12\,1 \\ \hline \qquad 17\,38'0 : 578_3 \\ \qquad 17\,34\,9 \\ \hline \qquad\quad 3\,1 \end{array}$$

Anhang Z: Literatur

[RLA] Martin Reese, Werner Lange, Erhard Anthes, Der Friden Wurzelautomat, Grünes Heft, http://www.ph-ludwigsburg.de/mathematik/mmm/gruen_frieden.htm

[DNK] Der Neue Koschemann, Mathematisches Arbeitsbuch für Realschulen, Ausgabe B, Rechnen, Arithmetik und Algebram Geometrie für das 8. Schuljahr, Frankfurt/Main, 1969

[RRR] Rühmkorff, Röntgen, Regensburg, Historische Instrumente zur Gasentladung, Ein Seminarprojekt am Lehrstuhl für Wissenschaftsgeschichte der Universität Regensburg; unter Mitarbeit von Britta Görs, Martin Kirschke, Michael Klein, Anna Maerker und Sandra Wilde mit einem Beitrag von Markus Völk zur Röntgendiagnostik in Regensburg heute; vorgestellt von Christoph Meinel, Regensburg 1997